Soluzioni Semifinali italiane dei Campionati Internazionali di Giochi Matematici 6 giugno 2020

Ronny Montagnani

6 agosto 2020

1 Pari/dispari

Costruiamo il numero di cinque cifre cercando di renderlo il più piccolo possibile.

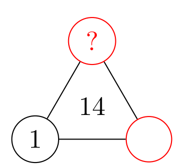
- Prima cifra: deve essere pari, scegliamo il più piccolo cioè **2**
- Seconda cifra: deve essere dispari, scegliamo il pari più piccolo cioè **1**
- Terza cifra, deve essere pari, scegliamo il più piccolo cioè **0**
- Quarta cifra: deve essere dispari, scegliamo il pari più piccolo rimasto cioè **3**
- Quinta cifra, deve essere pari, scegliamo il più piccolo cioè **4**

Il numero scelto da Lavinia è **21034**.

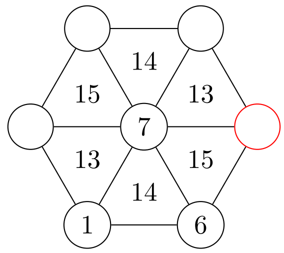
2 L'esagono

2.1 soluzione 1

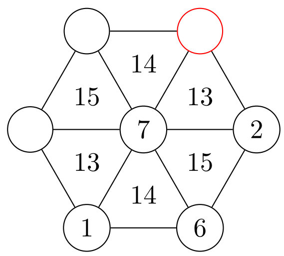
Nel triangolo



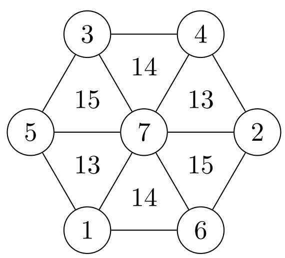
la somma dei 3 vertici deve essere 14, quindi quella dei due vertici in rosso deve essere 13. Questa somma può essere ottenuta solo usando come addendi 6 e 7. Abbiamo due possibilità di collocarli. Se proviamo ad inserire 7 nel cerchio centrale allora di conseguenza possiamo completare tutto l'esagono in quanto avremo inzialmente questa situazione:



Da cui si ricava il numero 2 da mettere nel cerchio rosso



E così via fino a riempire tutto lo schema utilizzando tutti i numero da 2 a 7.



Provando ad inserire il numero 6 al centro non si riesce a riempire in modo corretto lo schema.

Il numero scritto nel dischetto centrale è quindi **7**.

2.2 soluzione 2

La somma dei numeri scritti sui vertici di un triangolo è uguale al numero scritto nel triangolo. La somma di tutti i numeri scritti nei 6 triangoli è: $15+14+13+15+14+13 = 84$.
Questa somma lo ottengo quindi anche sommando tutti i vertici dei 6 triangoli. Notiamo che ogni numero sui 6 vertici esterni viene utilizzato per 2 triangoli e quindi sarà presente due volte nella somma. Il numero nel vertice al centro (quello cercato) è il vertice di 6 triangoli e quindi sarà presente 6 volte nella somma.

84 deve essere la somma di 6 numeri moltiplicati per 2 (chiamiamoli a, b, c, d, e, f) e di un numero moltiplicato per 6 (chiamiamolo g). Quindi abbimamo

$$2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 6g = 84$$

$$2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 4g = 84$$

$$2(a + b + c + d + e + f + g) + 4g = 84$$

qualunque siano a,b,c,d,e,f,g sono comunque i numeri da 1 a 7

$$a + b + c + d + e + f + g = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

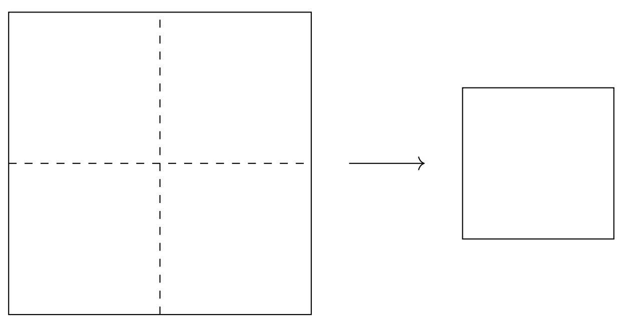
$$2 \times 28 + 4g = 84$$

$$g = \frac{84 - 56}{4} = 7$$

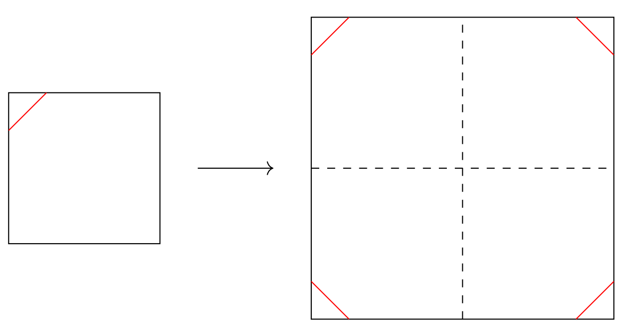
Il numero scritto nel cerchio centrale è quindi **7**.

3 Piega a taglio

Prendiamo un rettangolo e lo pieghiamo due volte, cioè lungo le linee mediane indicate in figura:



Il massimo numero di pezzi si ottiene con un taglio su un angolo che non attraversi le pieghe come mostrato di seguito.



Dividendo così il rettangolo in **5 parti**.

4 Buon appetito!

Il cubi 4 e 5 hanno i morsi su due spigoli appartenenti ad una stessa faccia, mentre i cubi 1 e 2 li hanno appartenenti a facce diverse. Quindi 4 e 5 sono sicuramente cubi diversi da 1 e 2. Inoltre si vede facilmente che 4 è diverso da 5 in quanto i morsi sul cubo 4 sono su spigoli che hanno un vertice in comune, mentre sul cubo 5 no. I cubi 1 e 2 sono diversi tra loro in quanto il cubo 2 ha i morsi su spigoli paralleli, mentre questo non accade sul cubo 1.
Riassumendo all'interno del gruppo 1, 2, 4 e 5 non ci sono due cubi uguali. Uno di questi quindi deve essere uguale al cubo 3 che ha la caratteristica di non mostrare i morsi. Visto che vediamo 9 spigoli su 12 significa che i morsi sono sui rimanenti 3 spigoli nascosti che hanno la particolarità di avere tutti un vertice in comune, come per il cubo 4. I numeri che si riferiscono allo stesso cubo sono quindi **il 3 e il 4**.

5 Un salto nel futuro

La colonna delle decine ha un risultato più alto di 1 rispetto al "2" che vorremmo, mentre la colonna delle centinaia ha un risultato più basso di "1". Invertendo quindi il 9 dalle decine con l'8 dalle unità otteniamo proprio:

$$\begin{array}{r} 1093\ + \\ 862\ + \\ 75\ = \\ \hline 2120\ \ \end{array}$$

6 Mai con una differenza piccola

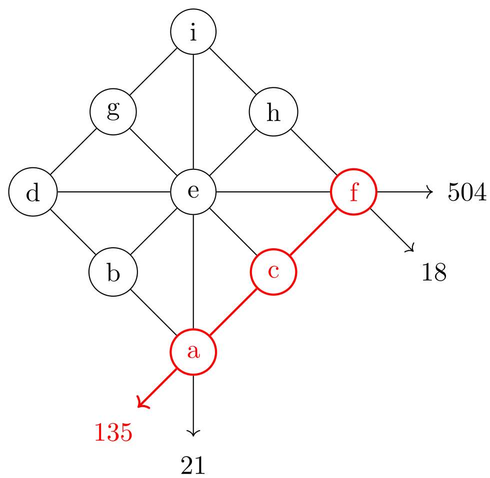
Cerchiamo di minimizzare il numero scritto da Lavinia rispettando le regole che ha scelto. Come prima cifra scegliamo quindi **1**. La seconda deve distare almeno 3 e quindi scegliamo **4**. Come terza cifra possiamo scegliere la minima possibile cioè **0**. Per rispettare la differenza di almeno 3 possiamo usare proprio il numero **3** come quarta cifra ed infine il **6** come ultima cifra. Otteniamo che il più piccolo numero scritto da Lavinia è **14036**.

7 La banda dei nove

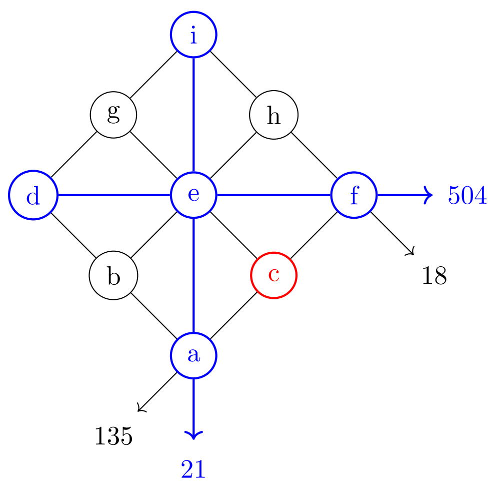
Visto che dobbiamo ragionare sui prodotti conviene fattorizzare i numeri indicati:

$$
\begin{aligned}
504 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \\
135 &= 3 \times 3 \times 3 \times 5 \\
18 &= 3 \times 2 \times 3 \\
21 &= 3 \times 7
\end{aligned}
$$

Osserviamo la figura:



135 contiene il fattore 5, quindi questo deve essere contenuto all'interno di uno dei tre disci "a", "c" od "f" (indicati in rosso).



Il fattore 5 però non è presente nei prodotti 21 e 504 e quindi non può essere nei dischi "i", "e", "a", "d" e "f" (indicati in blu). Il fattore **5** quindi

è contenuto nel dischetto "c" che era quello indicato con il "?" dal problema. Per la precisione abbiamo ricavato che il disco "c" contiene un multiplo di 5, ma visto che i numeri possibili sono quelli da 1 a 9, allora conterrà il numero **5** stesso.

8 Un numero straordinario

Indichiamo il numero straordinario con la notazione ab dove a rappresenta le decine e b le unità. Il numero straordinario è quindi $10a+b$ e il suo inverso $10b+a$. La richiesta del problema può essere quindi tradotta con questa espressione:

$$\underbrace{10a+b}_{num.\ straordinario} + \underbrace{a+b}_{somma\ delle\ cifre} = \underbrace{10b+a}_{num.\ invertito}$$

Dalla quale si ottiene:

$$5a = 4b$$

Che ha come soluzione:

$$a = 4$$
$$b = 5$$

Il numero straordinario di Milena è quindi **45**.

9 Le frazioni

Jacopo ordina le frazioni in base alla somma tra numeratore e denominatore:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{somma\ 2} \left| \underbrace{\frac{1}{2}\ \frac{2}{1}}_{somma\ 3} \right| \underbrace{\frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{1}}_{somma\ 4} \left| \underbrace{\frac{1}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{1}}_{somma\ 5} \right.$$

All'interno di un gruppo di frazioni con la stessa somma gli elementi sono ordinati in modo crescente in base al numeratore.

La frazione $\frac{2}{9}$ fa parte del gruppo a somma 11 e all'intero del gruppo è la seconda. Prima di essa ci sono tutte le frazioni dei gruppi a somma da 2 a 10 e la frazione $\frac{1}{10}$.

Ogni gruppo a somma S è composto da $S-1$ elementi. Il numero di elementi totali dei gruppi a somma da 2 a 10 è quindi la somma $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. A questa aggiungiamo un elemento, cioè la frazione $\frac{1}{10}$, quindi le frazioni scritte prima di $\frac{2}{9}$ sono **46**.

10 L'orologio di Luca

Per ogni ora tra le 14 e le 20 analizziamo quali minuti possono avere lo stesso prodotto.

$$\text{Ore } 14 \Rightarrow 1 \times 4 = 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 4 \\ 4 \times 1 \\ 2 \times 2 \end{array} \right\} \text{ 3 possibilità}$$

$$\text{Ore } 15 \Rightarrow 1 \times 5 = 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 5 \\ 5 \times 1 \end{array} \right\} \text{ 2 possibilità}$$

$$\text{Ore } 16 \Rightarrow 1 \times 6 = 6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 6 \\ 2 \times 3 \\ 3 \times 2 \end{array} \right\} \text{ 3 possibilità}$$

$$\text{Ore } 17 \Rightarrow 1 \times 7 = 7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 7 \end{array} \right\} \text{ 1 possibilità}$$

$$\text{Ore } 18 \Rightarrow 1 \times 8 = 8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 8 \\ 2 \times 4 \\ 4 \times 2 \end{array} \right\} \text{ 3 possibilità}$$

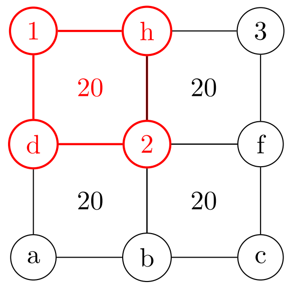
$$\text{Ore } 19 \Rightarrow 1 \times 9 = 9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 \times 9 \\ 3 \times 3 \end{array} \right\} \text{ 2 possibilità}$$

$$\text{Ore } 20 \Rightarrow 2 \times 0 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 \times 0 \\ 0 \times 1 \\ 0 \times 2 \\ 0 \times 3 \\ 0 \times 4 \\ 0 \times 5 \\ 0 \times 6 \\ 0 \times 7 \\ 0 \times 8 \\ 0 \times 9 \\ 1 \times 0 \\ 2 \times 0 \\ 3 \times 0 \\ 4 \times 0 \\ 5 \times 0 \end{array} \right\} \text{ 15 possibilità}$$

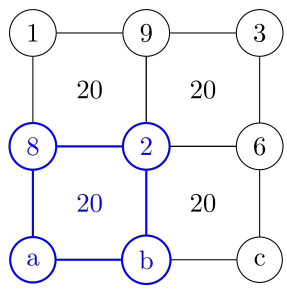
In totale di **29** possibilità.

11 I nove gettoni

Il quadrato evidenziato in rosso contiene i numeri 1 e 2, per arrivare a somma 20 manca 17 che può essere ottenute solo con 9 e 8. I dischi ”d” e ”h” conterranno quindi 9 e 8.

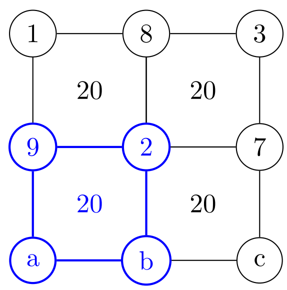


Proviamo a mettere 8 nel disco ”d” e 9 nel disco ”h”. Questo obbliga il numero 6 nel disco ”f”:

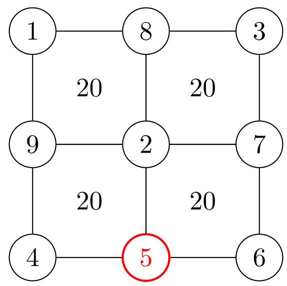


Sono rimasti da collocare i numeri 4, 5 e 7 che però non ci permettono di completare lo schema rispettando la somma 20 del quadrato in basso a sinistra (evidenziato in blu) al quale manca 10.

Mettendo invece il numero 8 nel disco ”h” e 9 nel disco ”d” e di conseguenza il 6 nel disco ”f” otteniamo:



rimangono da collocare i numeri 4, 5 e 6 che ci permettono di completare lo schema in questo modo:



Il numero scritto nel disco indicato dal testo con "?" è il **5**.

12 Un quadro moderno

Chiamiamo a e b la larghezza e l'altezza del quadro. La larghezza della cornice quindi è $a+6$ e l'altezza è $b+6$. L'area del quadro, uguale a quella della cornice, è $a \cdot b$. L'area del rettangolo complessivo di cornice e quadro è il doppio, cioè $2ab$ ed è anche $(a+6)(b+6)$. Otteniamo questa equazione:

$$\begin{aligned} 2ab &= (a+6)(b+6) \\ 2ab &= ab + 6a + 6b + 36 \\ ab - 6a &= 36 + 36 \\ a(b-6) &= 6(b+6) \\ a &= \frac{6(b+6)}{b-6} \end{aligned}$$

Essendo a intero allora il denominatore $b-6$ deve contenere fattori di 6 e di $b+6$. I divisori di $b-6$ e $b+6$ sono anche divisori della loro differenza, cioè 12. Quindi $b-6$ è composto solo da fattori presenti in 6 e in 12, cioè $2^3 \cdot 3^2$.

Possiamo procedere provando valori di b che soddisfano questi criteri:

$$(b-6) = 1 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 13}{1} = 78$$

non accettabile in quanto 78 è maggiore del triplo di 7

$$(b-6) = 2 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 14}{2} = 42$$

non accettabile in quanto 42 è maggiore del triplo di 8

$$(b-6) = 3 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 15}{3} = 30$$

non accettabile in quanto 30 è maggiore del triplo di 9

$$(b-6) = 4 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 16}{4} = 24$$

accettabile in quanto 24 è minore del triplo di 10
l'area del quadro sarebbe $24 * 10 = 240$

$$(b - 6) = 6 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 18}{6} = 18$$

accettabile in quanto 18 è minore del triplo di 12
l'area del quadro sarebbe $18 * 12 = 216$

$$(b - 6) = 8 \Rightarrow b = 14 \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 20}{8} = 15$$

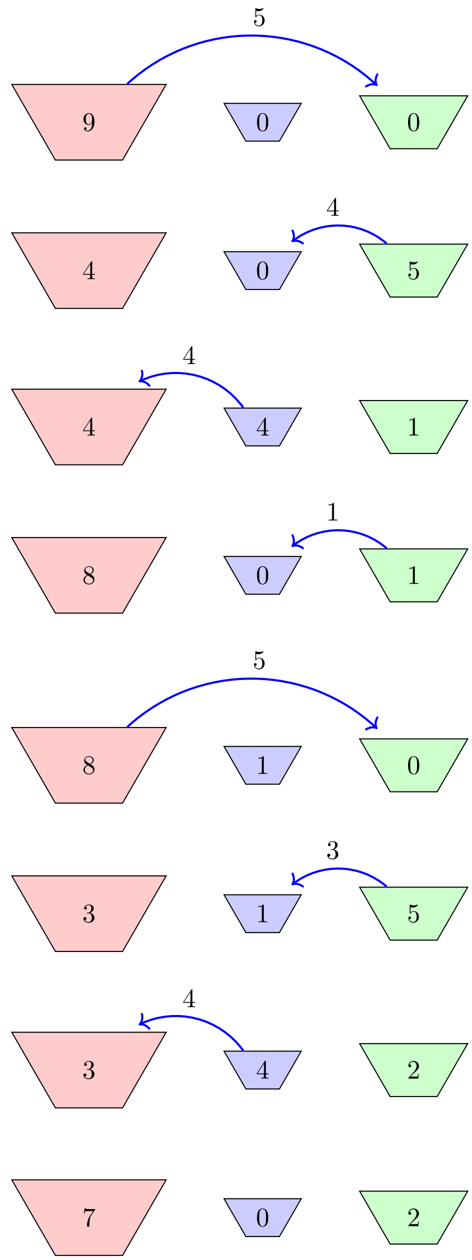
accettabile in quanto 15 è minore del triplo di 14
l'area del quadro sarebbe $15 * 14 = 210$

Valori maggiori di b producono valori di a tali che $a < b$ e corrispondenti a coppie (a, b) con valori invertiti rispetto a quelle già provate.

Il minimo per l'area del quadrato è quindi **210**.

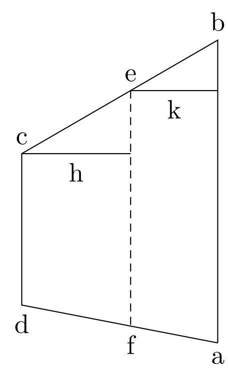
13 I secchi di latte

Il minimo di travasi da effettuare è **7**. Mostriamo di seguito quali sono. La capienza dei secchi da sinistra a destra è di 9, 4 e 5 litri.



14 L'ederità

In figura rappresentiamo il campo di Renato:



Dalla misura dell'area possiamo calcolare l'altezza:

$$altezza = h+k = Area : (\overline{ab}+\overline{cd}) \times 2 = 10000 : (80+60) \times 2 = \frac{20000}{140} = 142,86$$

La linea di separazione cercata, indicata con il segmento che va da e ad f, divide il campo in due trapezi di altezza h e k aventi la stessa area. Chiamiamo l la lunghezza del segmento $\overline{ef}$.

I due trapezi devono avere la stessa area di $5000m^2$, da questa possiamo scrivere le equazioni per ricavare le loro altezze:

$$h = \frac{2 \times 5000}{60 + l}$$

$$k = \frac{2 \times 5000}{80 + l}$$

Possiamo quindi calcolare per quale l la somma delle due altezza è proprio quella del trapezio

$$\begin{aligned}
\frac{20000}{140} &= h + k = \frac{2 \times 5000}{60 + l} + \frac{2 \times 5000}{80 + l} \\
&= 10000(\frac{1}{60 + l} + \frac{1}{80 + l}) \\
&= 10000(\frac{80 + l + 60 + l}{(60 + l)(80 + l)}) \\
\frac{20000}{140} &= \frac{10000(2l + 140)}{(60 + l)(80 + l)} \\
\frac{1}{70} &= \frac{(2l + 140)}{(60 + l)(80 + l)} \\
(60 + l)(80 + l) &= 70(2l + 140)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4800 + 140l + l^2 &= 140l + 9800 \\
l^2 &= 5000 \\
l &= 50\sqrt{2} = \mathbf{70{,}72}
\end{aligned}
$$

15 Il rospo meticoloso

Contiamo i modi che ha il rospo di attraversare la strada in base al numero di salti. Nei casi in cui il rospo effettua più di un salto, e quindi usa le strisce, distingueremo due sotto casi: se il rospo usa l'ultima striscia o no. Questo perché quando usa una striscia che non sia l'ultima, abbiamo il vincolo di dover saltare la successiva. Questo non succede invece quando si trova sull'ultima striscia dove effettua un solo passo per arrivare sul marciapiede. Contando le 10 strisce e il marciapiede il rospo deve compiere 11 passi tramite un numero di salti da 1 a 7 (si verifica che con 8 o più salti non si riesce a rispettare il vincolo di non saltare sulla striscia successiva).

1 salto
: In queso caso abbiamo un solo modo di attraversare la strada

2 salti non usando l'ultima striscia
: Anche in questo caso abbiamo un solo modo: primo salto sulla striscia 10 e secondo salto sul marciapiede.

2 salti usando l'ultima striscia
: In questo caso abbiamo 9 modi: primo salto su una striscia dalla 1 alla 9 e poi secondo salto sul marciapiede.

3 salti non usando l'ultima striscia
: Il rospo si appoggerà su due strisce. Il conteggio dei modi è equivalente a contare gli anagrammi della parola SSPPPPPP (2 S e 6 P) dove la S rappresenta una striscia dove il rospo si ferma e la P una striscia saltata "falcoltative", cioè una striscia dove avrebbe potuto saltare. In questo caso queste sono 6 in quanto ce ne sono 2 che non possono essere usate essendo successive a quella dove è atterrato il rospo con un salto. Per esempio se decide di saltare sulla striscia 1 e sulla 5, questo comportamento corrisponde alla parola SPPSPPPP. Questi anagrammi sono $\binom{8}{2} = 28$.

3 salti usando l'ultima striscia
: In questo caso il secondo salto sarà sull'ultima striscia e il terzo sul marciapiede. La scelta del primo salto equivale, per gli stessi ragionamenti, all'anagramma della parola SPPPPPPP. Quindi sono $\binom{8}{1} = 8$.

4 salti non usando l'ultima striscia
: Anagrammi di SSSPPPP $\binom{7}{3} = 35$

4 salti usando l'ultima striscia
: Anagrammi di SSPPPPP $\binom{7}{2} = 21$

5 salti non usando l'ultima striscia
: Anagrammi di SSSSPP $\binom{6}{4} = 15$

5 salti usando l'ultima striscia
    Anagrammi di SSSPPP $\binom{6}{3} = 20$
6 salti non usando l'ultima striscia
    Anagrammi di SSSSS $\binom{5}{5} = 1$
6 salti usando l'ultima striscia
    Anagrammi di SSSSP $\binom{5}{4} = 5$

Il totale è $1 + 1 + 9 + 28 + 8 + 35 + 21 + 15 + 20 + 1 + 5 = \mathbf{144}$

16 Quanto mangiano!

Definiamo:

Ei = quantità di erba al momento dell'acquisto per ettaro = 1, cioè la usiamo come unità di misura.

Vm = quantità di erba mangiata da una mucca in una settimana.

Vc = quantità di erba che cresce in una settimana in un ettaro.

Dalle indicazioni del problema possiamo scrivere due equazioni. Per esempio sappiamo che l'erba iniziale di 11 ettari (quindi 11×1) viene consumata da 7 mucche in 3 settimane. Le 7 mucche consumano in quel periodo $Vm \times 7 \times 3$ erba. Ma nello stesso periodo l'erba cresce di $Vc \times 3 \times 11$.

$$\begin{cases} 11 - Vm \times 7 \times 3 + Vc \times 3 \times 11 = 0 \\ 29 - Vm \times 13 \times 5 + Vc \times 5 \times 29 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{cases} Vm = \dfrac{319}{450} \\ Vc = \dfrac{53}{450} \end{cases}$$

La domanda del problema si traduce nel risolvere questa equazione:

$$\begin{aligned} s &= \textit{numero di settimane} \\ 29 - Vm \times 5 \times s + Vc \times s \times 29 &= 0 \\ 29 - \frac{319}{450} \times 5 \times s + \frac{53}{450} \times s \times 29 &= 0 \\ \mathbf{s} &= \mathbf{225} \end{aligned}$$

17 Finali di potenze

Consideriamo che le ultime due cifre del prodotto di un numero per 2 sono influenzate solo dalle ultime due cifre del fattore moltiplicato per 2. La soluzione si può ottenere facilmente elencando le ultime due cifre delle potenze di 2 eseguendo moltiplicazioni successive:

1: $2^0 = 1$

2: $1 \times 2 = 2$

3: $2 \times 2 = 4$

4: $4 \times 2 = 8$

5: $8 \times 2 = 16$

6: $16 \times 2 = 32$

7: $32 \times 2 = 64$

8: $64 \times 2 = 128 \to 28$

9: $28 \times 2 = 56$

10: $56 \times 2 = 112 \to 12$

11: $12 \times 2 = 24$

12: $24 \times 2 = 48$

13: $48 \times 2 = 96$

14: $96 \times 2 = 192 \to 92$

15: $92 \times 2 = 184 \to 84$

16: $84 \times 2 = 168 \to 68$

17: $68 \times 2 = 136 \to 36$

18: $36 \times 2 = 72$

19: $72 \times 2 = 144 \to 44$

20: $44 \times 2 = 88$

21: $88 \times 2 = 176 \to 76$

22: $76 \times 2 = 152 \to 52$

23: $52 \times 2 = 104 \to 4$ (già usato)

Si riescono quindi a scrivere **22** numeri diversi.

18 Il triello

Di seguito indichiamo con A Angelo, con G Giorgio e con M Marco. La probabilità di colpire di Marco la indichiamo con x.

Con 3 giocatori abbiamo 6 possibili ordini con cui si spareranno i tre giocatori:

1: A-G-M

2: A-M-G

3: M-A-G

4: M-G-A

5: G-A-M

6: G-M-A

Al suo turno Angelo sparerà a Giorgio, se è vivo, in quanto è quello che potrebbe risponderli con la maggiore probabilità di colpirlo. Giorgio al suo turno cercherà di uccidere Angelo, altrimenti questo gli sparerà uccidendolo. Marco invece ha come strategia migliore, quando ha due scelte, di non sparare. Infatti se spara a Giorgio e lo uccide allora subito dopo Angelo gli spara vincendo il triello. Se invece non spara a nessuno sa che Angelo sparerà a Giorgio colpendolo sicuramente e togliendo uno sfidante dal triello.

Seguendo queste strategie si nota che i primi 3 casi elencati sono identici: in ognuno abbiamo A, che sparando prima di G, lo uccide e dopo spetta ad M a sparare. Indichiamo questo caso, che unisce i primi 3, come caso AG.

Allo stesso modo gli altri 3 casi (da 4 a 6) sono identici in quanto abbiamo G che spara ad A come prima mossa. Se lo manca allora A uccide G. Se lo colpisce allora si sviluppa un duello tra G ed M. Indichiamo i caso che unisce i tre casi da 4 a 6 con GA.

Caso AG (A spara prima di G):

Dopo che A ha ucciso G rimane un duello tra M ed A, dove M vince se uccide A al primo colpo, con probabilità x. Perde invece se lo manca, con probabilità $1 - x$.

R_A = probabilità di vittoria di A $= 1 - x$

R_G = probabilità di vittoria di G $= 0$

R_M = probabilità di vittoria di M $= x$

Caso GA (G spara prima di A):

Se G manca A (probabilità $\frac{1}{6}$) allora A uccide G e poi abbiamo un duello tra A ed M come nel caso precedente quindi le 3 probabilità di vittoria in questo sotto caso di GA sono:

S_A = probabilità di vittoria di A $= \frac{1}{6}(1 - x)$

S_G = probabilità di vittoria di G $= 0$
S_M = probabilità di vittoria di M $= \frac{1}{6}x$

Se G colpisce A (probabilità $\frac{5}{6}$) allora abbiamo un duello tra M e G con M che inizia. In questo caso la probabilità che vinca M la possiamo calcolare così:

$$P_M = x + (1-x)\frac{1}{6}P_M$$

Cioè M vince al primo tentativo con probabilità x oppure se manca G (probabilità $1-x$) e questo fallisce anche lui il colpo (probabilità $\frac{1}{6}$) e ricorsivamente riapplichiamo la probabilità che M vinca. Da cui si ricava

$$P_M = \frac{6x}{5+x}$$

E quindi la probabilità che il duello lo vinca G è:

$$P_G = 1 - P_M = 1 - \frac{6x}{5+x} = \frac{5+x-6x}{5+x} = \frac{5-5x}{5+x} = \frac{5(1-x)}{5+x}$$

Quindi le 3 probabilità probabilità di vittoria in questo sotto caso di GA sono:
Z_A = probabilità di vittoria di A $= 0$
Z_G = probabilità di vittoria di G $= \frac{5}{6}P_G = \frac{5}{6}\frac{5(1-x)}{5+x}$
Z_M = probabilità di vittoria di M $= \frac{5}{6}P_M = \frac{5}{6}\frac{6x}{5+x}$

Visto che i casi AG e GA hanno probabilità $\frac{1}{2}$ possiamo mettere tutto assieme e calcolare le probabilità di vittoria dei 3 giocatori:

$$V_A = \frac{1}{2}R_A + \frac{1}{2}(S_A + Z_A) = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}\frac{1}{6}(1-x) = \frac{7}{12}(1-x)$$
$$V_G = \frac{1}{2}R_G + \frac{1}{2}(S_G + Z_G) = \frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{5(1-x)}{5+x} = \frac{25(1-x)}{12(5+x)}$$
$$V_M = \frac{1}{2}R_M + \frac{1}{2}(S_M + Z_M) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}\frac{6x}{5+x}) = \frac{7x^2+65x}{12(5+x)}$$

Le condizioni imposte dal problema sono che la probabilità di Marco siano più alte di quelle degli altri 2, quindi $V_M > V_A$ e $V_M > V_G$.

Sviluppando queste due disequazioni:

$$
\begin{aligned}
V_M &> V_A \\
\frac{7x^2+65x}{12(5+x)} &> \frac{7}{12}(1-x) \\
7x^2+65x &> 7(1-x)(5+x) \\
7x^2+65x &> 35+7x-35x-7x^2 \\
14x^2+93x-35 &> 0
\end{aligned}
$$

Da cui si ricavano, risolvendo l'equazione di secondo grado (che esprime una parabola rivolta verso l'alto), che $x > \frac{5}{14}$ e $x < -7$ che non ha significato come probabilità.

Similmente:

$$
\begin{aligned}
V_M &> V_G \\
\frac{7x^2+65x}{12(5+x)} &> \frac{25(1-x)}{12(5+x)} \\
7x^2+65x &> 25-25x \\
7x^2+90x-25 &> 0
\end{aligned}
$$

Da cui si ricavano, risolvendo l'equazione di secondo grado (che esprime ancora una parabola rivolta verso l'alto), che $x > 0,27$ e $x < -13,13$ che non ha significato come probabilità.

Concludendo otteniamo che la probabilità di colpire di M deve essere $x > \frac{5}{14}$.

La funzione $\frac{7x^2+65x}{12(5+x)}$, che esprime la sua probabilità di vittoria di M, è crescente per x e quindi il suo minimo lo trovo minimizzando x. Cioè quando $x = \frac{5}{14}$.

La probabilità minima di vittoria di Marco è quindi:

$$
\frac{7x^2+65x}{12(5+x)} = \frac{7\cdot(\frac{5}{14})^2+65(\frac{5}{14})}{12(5+(\frac{5}{14}))} = \frac{3}{8}
$$